# Einfache Constructionen windschiefer Hyperboloide und Paraboloide mit ihren ebenen Schnitten und Selbstschatten.

Von Prof. R. Niemtschik in Graz.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. März 1870.)

**1.** Die auf der anliegenden Tafel in bloß einer orthogonalen Projection dargestellten Hyperboloide und Paraboloide sind weder der Lage noch der Form nach vollständig bestimmt. Das Resultat einer Aufgabe über diese Flächen kann also auch nur in einer einzigen Projection bestehen, die sich aber durch Anwendung zweckmäßiger Constructionen und mit Berücksichtigung der Eigenschaften, welche den Hyperboloiden und Paraboloden als Flächen zweiter Ordnung zukommen, in einfacher und bestimmter Weise darstellen läßt.

Der wesentliche Vorheil des hier angewandten Verfahrens besteht darin, dass sich die betreffenden Aufgaben allgemeiner als bei Benützung zweier Projectionen, durch welche die dargestellten Objecte vollkommen bestimmt wären, lösen lassen und daß gleichwohl der Übergang von den allgemeinen auf die speciellen Fälle ohne Änderung der Zeichnung mit Leichtigkeit geschehen kann.

## Das windschiefe Hyperboloid.

**2.** Die Geraden *AB, CD, EF* Fig. 1 bilden die Leitlinien des darzustellenden Hyperboloides.

Die Erzeugenden, welche die Leitlinien *AB, CD, EF* schneiden, ergeben sich sehr einfach, wenn man durch *AB* und *CD* parallele Ebenen *ABE, CDF* legt und die Durchschnittspunkte *E, F* der Leitlinie *EF* mit den Ebenen *ABE, CDF* bestimmt; denn jede durch *EF* gelegte Ebene schneidet die Ebenen *ABE, CDF* in parallelen Geraden, welche beziehungsweise durch *E* und *F* gehen, und diese Parallelen schneiden wieder die Leitlinien *AB, CD* in Punkten, die einer Erzeugenden des Hyperboloides angehören. Hier wurden die Punkte *E, F* beliebig angenommen.

Legt man etwa durch *EF* und den Punkt 1 der Leitlinie *AB* die Ebene *EF*1, so schneidet sie die Ebenen *ABE* und *CDF* in den Parallelen *E*1, *F*I, die Leitlinie *CD* in dem Punkte I und deßhalb ist die Gerade 1I eine Erzeugende des Hyperboloides. Wäre der Punkt I gegeben, so würde man zuerst $E1 \| F\mathrm{I}$ und dann 1I ziehen.

Die parallel zu *CD* durch die Leitlinie *EF* gelegte Ebene schneidet die Ebene *ABE* in der zu *CD* parallelen Geraden *cEd* und die parallel zu *AB* durch *EF* gelegte Ebene schneidet die Ebene *CDF* in der zu *AB* parallelen Geraden *aFb*.—*ab*, *cd* sind Erzeugende, denn *ab* schneidet *EF* in *F*, *CD* in *a* und *AB* in unendlicher Entfernung; *cd* schneidet aber *EF* in *E*, *AB* in *A* und *CD* in unendlicher Entfernung.

Legt man durch *AB* und *CD* die zu *EF* parallelen Ebenen *ABe* und *CDf*, so schneiden sie sich in einer zu *EF* parallelen Geraden *ef*, welche *AB* in *f*, *CD* in *e* und *EF* in unendlicher Entfernung trifft und deßhalb ebenfalls eine Erzeugende des Hyperboloides ist. Um *ef* zu erhalten, ist $F\alpha \| cd$, $A\alpha \| EF$, $\alpha e \| AB$ und $ef \| EF$ zu ziehen. Es schneiden sich nämlich die Ebenen *FCD*, *cdF* ($\|CDf$) in $F\alpha$, *cdf* und die zu *EF* parallele Ebene $AB\alpha$ in $A\alpha$, $AB\alpha$ und *FCD* in $\alpha e$, folglich *ABe* und *CDf* in *ef*.

Aus dieser Construction folgt: $ae \# F\alpha \# AE$, $Fa \# e\alpha \# fA$ so wie $Fe \# fE$; deßhalb schneiden sich die drei Geraden *Aa*, *Ee* und *Ff* in einem Punkte *O* und ist: $Oa = OA$, $Oe = OE$ sowie $Of = OF$.

Offenbar ist *O* zugleich der Durchschnittspunkt der Ebenen *ABab*, *CDcd*, *EFef* und steht *O* von je zwei Parallelen *AB*, *ab*; *CD*, *cd*; *EF*, *ef* gleichweit ab. Daraus folgt wieder, dass jede Gerade, welche durch *O* geht und eine von den Leitlinien *AB*, *CD*, *EF* schneidet, auch die zu der geschnittenen Leitlinie parallele Erzeugende *ab*, *cd* oder *ef* schneiden muss und daß die sich ergebenden Schnittpunkte einer solchen Geraden von *O* gleichweit entfernt sind.

Legt man also durch *O* und eine Erzeugende 1I eine Ebene, so schneidet sie die Ebenen *ABF*, *CDE* in den Geraden 1*O*(1) I*O*(I), die Leitlinien *AB*, *CD* in den Punkten 1, I und die Erzeugenden *ab*, *cd* in den Punkten (1), (I).

Weil $O(1) = O1$ und $O(\mathrm{I}) = O\mathrm{I}$ ist; so sind die Dreiecke 1*O*I und (1)*O*(I) congruent, folglich ist $(1)(\mathrm{I}) \# 1\mathrm{I}$. Weil aber 1I die Leitlinie *EF* in *x* schneidet, so muß auch (1)(I) die zu *EF* parallele

Erzeugende $ef$ in $(x)$ schneiden, und zwar liegt $(x)$ zugleich im Durchschnitte der Geraden $xO$, $ef$.

Durch diese Betrachtungen gelangt man zu dem Schlusse, daß zu jeder die Leitlinien $AB$, $CD$, $EF$ schneidenden Erzeugenden eine parallele Gerade gefunden werden kann, welche wieder die Erzeugenden $ab$, $cd$, $ef$, sowie alle übrigen Geraden des ersten Systemes schneidet, die nämlich $AB$, $CD$, $EF$ als Leitlinien haben; ferner daß $O$ der Mittelpunkt des Hyperboloides ist.

Es ist aber selbstverständlich, daß die Erzeugenden des zweiten Systemes (1)(I)...(10)(X). zu welchen auch $AB$, $CD$, $EF$ gehören, auf dieselbe Weise wie die Erzeugenden des ersten Systemes construirt werden können, wenn man drei Erzeugende des ersten Systemes, etwa $ab$, $cd$, $ef$ als Leitlinien benützt. Z. B. Um die Erzeugende (9)(IX) des zweiten Systemes darzustellen, welche durch den Punkt (9) der Leitlinie $ab$ geht, lege man durch (9) und die Leitlinie $ef$ die Ebene $(9)ef$, welche also die Ebene $eab$ in der Geraden $e(9)$, die Ebene $fcd$ in der zu $e(9)$ parallelen Geraden $f$(IX) sowie die Leitlinie $cd$ in dem Punkte (IX) schneidet, und ziehe (9)(IX) als die verlangte Erzeugende.

Daß die Erzeugende (9)(IX) jede Erzeugende des ersten Systemes schneidet, constatiren wir durch den Nachweis, daß durch (9)(IX) und eine beliebige Erzeugende des ersten Systemes z. B. 3 III eine Ebene gelegt werden kann.

Weil 3, (IX) und III, (9) Durchschnittspunkte der Geraden 3 III, (9)(IX) mit den parallelen Ebenen $ABE$ und $CDF$ sind; so liegen die Geraden 3 III, (9)(IX) nur dann in einer Ebene, wenn 3(IX) || III(9) ist.

Aus den ähnlichen Dreiecken $Af$(IX) und $ae(9)$ folgt:

$$A(\mathrm{IX}) . a(9) = ae . Af;$$

nun ist $Af = aF$ und $ae = AE$, also auch:

$$A(\mathrm{IX}) . a(9) = AE . aF \tag{1}$$

ferner ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $AE3$ und $aF\mathrm{III}$:

$$A3 . a\mathrm{III} = AE . aF$$

und wenn für $AE . aF$ der Werth aus (1) gesetzt wird:

$$A3 . a\mathrm{III} = A(\mathrm{IX}) . a(9),$$

oder

$$\frac{A3}{A(\mathrm{IX})} = \frac{a(9)}{a\mathrm{III}}.$$

Aus dieser Gleichung und dem Umstande, daß $A3 \| a(9)$ sowie $A(\mathrm{IX}) \| a\mathrm{III}$ ist, ergibt sich also:

$$3(\mathrm{IX}) \| \mathrm{III}(9).$$

Demnach liegen die Geraden (9) (IX) und 3 III in einer Ebene, sie schneiden sich also in der That.

Auf gleiche Weise findet man, daß $1(\mathrm{IX}) \| \mathrm{I}(9)$, $2(\mathrm{IX}) \| \mathrm{II}(9) \ldots$ ist. Weil die Erzeugende (9) (IX) beliebig gewählt wurde, so kann aus dem vorstehenden Beweis gefolgert werden, daß jede Erzeugende des zweiten Systemes alle Erzeugenden des ersten Systemes schneidet und daraus folgt wieder, daß jede Erzeugende des ersten Systemes alle Erzeugenden des zweiten Systemes trifft, daß also das Hyperboloid auf zweifache Weise durch die Bewegung einer Geraden erzeugt werden kann.

Wählt man in $ab$ einen Punkt (10), der in vorliegender Figur zugleich in einer Erzeugenden 1I des ersten Systemes liegt, und zieht $f(\mathrm{X}) \| e(10)$; so ist (10) (X) eine Erzeugende des zweiten Systemes.

Wir wollen nun nachweisen, daß auch der Punkt (X) in der Projection der Erzeugenden 1I liegt, daß also die Erzeugenden 1I und (10) (X) sich decken.

In den Dreiecken $AE1$ und $aF\mathrm{I}$ ist:

$$A1 \,.\, a\mathrm{I} = AE \,.\, aF = ae \,.\, Af \tag{2}$$

und in den Dreiecken $A(\mathrm{X})f$ und $ae(10)$ ist:

$$A(\mathrm{X}) = \frac{ae \,.\, Af}{a(10)},$$

woraus durch Substitution des Werthes von $Af \,.\, ae$ aus (2) sich ergibt:

$$A(\mathrm{X}) = \frac{A1 \,.\, a\mathrm{I}}{a(10)}.$$

Bezeichnen wir vorläufig mit $z$ den Durchschnittspunkt der Geraden 1 (10) I; $cd$; so folgt aus den Dreiecken $Az1$ und $a(10)\mathrm{I}$

$$Az = \frac{A1 \,.\, a\mathrm{I}}{a(10)},$$

das ist aber der zuvor für $A$(X) gefundene Werth, weßhalb also die Geraden 1(10)I und $cd$ sich in dem Punkte (X) schneiden.

Daraus kann nun geschlossen werden, daß jede in der Fig. 1 dargestellte Gerade des Hyperboloides eigentlich die Projection zweier Erzeugenden bildet, von denen eine, 1I, dem ersten, die andere, (10)(X), dem zweiten Systeme angehört.

Soll aber durch einen beliebigen Punkt $p$ Fig. 2 der Erzeugenden 5V die Erzeugende (9)(IX) gezogen werden, so kann man durch $p$ und $ab$ die Ebene $pab$ legen; diese Ebene schneidet die Ebene $EF$5V in der Geraden $Fpw$, die Ebene $ABE$ in der zu $ab$ Parallelen $w$(IX) und die Erzeugende $cd$ in dem Punkte (IX), weßhalb also $p$(IX) die verlangte Erzeugende bildet.

Die durch den Punkt $p$ und die Erzeugende 2II gelegte Ebene $p$2II schneidet die Ebene $ABE$ in der Geraden 2(IX) und die Ebene $CDF$ in der Geraden II(9), $\|$ 2(IX). Die Richtung der Tracen 2(IX), II(9) ergibt sich durch $pq$, wenn $pr \| 5E$ und $rq \| E2$ gezogen wird; denn $pr$, $rq$ bilden die Durchschnitte der zu $ABE$ parallelen Ebene $pqr$ mit den Ebenen $EF$5V und $EF$2II.

Zieht man $pu \| EF$, $pv \|$ 2II und $uv \| F$II; so bildet $v$ den Durchschnittspunkt der zu 2II Parallelen $pv$ mit der Ebene $FCD$; daher liegt $v$ ebenfalls in der Trace II(9) der Ebene $p$2II und mithin kann (9) als Durchschnittspunkt der Geraden $ab$, $v$H dargestellt werden.

Wenn die Punkte (9), (IX) nicht zu benützen sind, kann man den Durchschnittspunkt $t$ der Ebene $p$2II mit einer Erzeugenden 3III construiren und dann $tp$ ziehen. $2x \|$ II$v$.

Wäre hingegen (9)(IX) gegeben und die Erzeugende $p$V darzustellen, so könnte man durch (9)(IX) die zu $EF$ parallele Ebene (9)(IX)$z$ legen, welche also die Ebene $FCD$ in der Geraden (9)$z$ schneidet. (IX)$z \#\!\!\!\!\!= EF$, $pu \| EF$. Die Ebene $pEF$ schneidet wieder die Ebenen $FCD$ und $ABE$ in den parallelen Geraden $Fu$V und $E$5, folglich die Erzeugenden $AB$, $CD$ in den Punkten 5, V.

Aus der Lage der Erzeugenden in Fig. 1, welche Tangenten der Contour des Hyperboloides sind, geht hervor, daß in diesem Falle die Contour eine Hyperbel ist, welche $O$ als Mittelpunkt und die durch $O$ gezogenen Erzeugenden als Asymptoten hat.

Weil die Leitlinien $AB$, $CD$, $EF$ und die Punkte $E$, $F$ unvollkommen bestimmt sind, so entspricht die dargestellte Projection unendlich vielen Hyperboloiden. Würde man aber die Lage der Leit-

linien etwa durch die Tracen der Ebenen *ABE* und *CDF* und durch eine bestimmte Neigung dieser Ebenen gegen die Zeichnungsfläche feststellen, dann würde dieselbe Projection einem vollkommen bestimmten Hyperboloide entsprechen.

Wir wollen jedoch auch die übrigen Aufgaben ganz allgemein behandeln und lassen deßhalb in den Figuren 3, 4, 5, 6 die Leitlinien *AB*, *CD*, *EF* des Hyperboloides in derselben Lage wie in den Fig. 1, 2.

**3.** Construction des elliptischen Durchschnittes I(I)2(2) des Hyperboloides *ABCDEF* Fig. 3 mit der Ebene *MNO*, welche durch den Mittelpunkt *O* der Fläche und die in der Ebene *FCD* befindliche Gerade *MN* bestimmt ist.

Die Trace *MN* und die Erzeugenden *CD*, *ab* treffen sich in den Punkten I, (2), welche also dem fraglichen Durchschnitte angehören und weil dessen Mittelpunkt *O* ist, so ergeben sich zwei andere Punkte desselben, wenn I*O* bis (I) in *cd* und (2)*O* bis 2 in *AB* verlängert, oder $O$(I) $=$ $O$I und $O2 = O(2)$ gemacht wird. I(I), 2(2) sind nicht conjungirte Durchmesser; I(2) und 2(I) sind aber parallele Sehnen, weil sie nämlich in den Durchschnitten der Ebene *MNO* mit den parallelen Ebenen *ABE* und *CDF* liegen.

Wird die Erzeugende I1, dann $1t \| CD$ sowie $t$I gezogen, so bildet $1t$ die Durchschnittslinie der Ebene *MNO* mit der durch die Erzeugenden *CD*, 1I gelegten, das Hyperboloid im Punkte I berührenden Ebene *C*1I, weßhalb also $t$I die dem Punkte I entsprechende Tangente der Schnittcurve ist.

Aus der Lage der Punkte 2, (2) gegen die parallelen Tangenten $t$I und $T$(I) ist zu entnehmen, daß die Schnittcurve I(I)2(2) eine Ellipse ist, welche also durch die beiden Durchmesser I(I), 2(2) und die Tangente $t$I vollkommen bestimmt ist.

Fielen die Tangente $t$I und die Erzeugende 1I zusammen, dann würden zwei parallele Erzeugende den Durchschnitt bilden.

Würden die Punkte 2, (2) außerhalb der parallelen Tangenten $t$I, $T$(I) fallen, dann wäre der Durchschnitt eine Hyperbel.

Um den Fall, wo eine nicht durch den Flächen-Mittelpunkt *O* gelegte Ebene das Hyperboloid nach einer Ellipse schneidet, nicht separat zeichnen zu müssen, nehmen wir an, daß diese Ebene durch die Geraden *MN* (in *CDF*) und *tn* (in *ABE*) gegeben ist. Dann

ergeben sich wieder die Durchschnitte I, (II) von *MN*, *CD*, *ab* und 3, (4) von *tn*, *AB*, *cd* als Punkte der fraglichen Ellipse; und weil I (II), 3 (4) parallele Sehnen bilden, so kann durch deren Mittelpunkte ein Durchmesser *D* gezogen werden. Die Lage eines zweiten Durchmessers (*D*) kann man aber durch den Mittelpunkt der Sehne I 3 und den Durchschnittspunkt der Tangenten *t* I und (*t*) 3 bestimmen. Im Durchschnitte von *D*, (*D*) liegt der Mittelpunkt der Ellipse und dann kann diese wieder ohne weitere Rücksicht auf das Hyperboloid gezeichnet werden. Daß jeder elliptische Schnitt die (hyperbolischen) Contouren des Hyperboloides berühren muß, ist selbstverständlich.

**4.** Construction des parabolischen Durchschnittes *σ*I(IX) Fig. 4 des Hyperboloides *ABCDEF* mit der Ebene *MNmn*, welche mit der Ebene *abAB* der Erzeugenden *ab*, *AB* parallel ist und die Ebenen *ABE*, *CDF* in den Geraden *MN*, *mn* schneidet. $MN \| mn \| AB$.

Der Abstand der Tracen *MN*, *mn* ist also gleich jenem der Erzeugenden *ab*, *AB*. Die gemeinschaftlichen Punkte I von *MN*, *CD* und (IX) von *mn*, *cd* gehören der fraglichen Parabel an, deren Axe *Sz* mit *AB* parallel ist.

Um den Parabel-Scheitel *S* zu finden, ziehen wir die Erzeugenden I 1 und (IX)(9), legen durch 1 I, *CD* sowie durch (9)(IX), *cd* die Ebenen 1*CD* und (9)*cd*, welche das Hyperboloid beziehungsweise in I und (IX) berühren. Die Ebene 1*CD* schneidet die Ebene *ABE* in der zu *CD* Parallelen 1*t*, folglich die Ebene *MNm* in der Geraden I*t*, welche also in I die Parabel berührt; die Ebene (9)*cd* schneidet wieder die Ebene *CDF* in der zu *cd* Parallelen (9)*M*, folglich die Ebene *MNm* in der Geraden *M*(IX), welche ebenfalls Tangente der Parabel ist.

Die Tangenten *t*I, *M*IX treffen sich in dem Punkte *T*, welcher auch aus dem Durchschnitte der Tangente *t*I mit dem durch den Mittelpunkt *u* der Sehne IIX gezogenen Parabel-Diameter erhalten werden kann.

Nun errichten wir $\mathrm{I}p \perp mn$ $(\mathrm{IX})N \perp MN$, halbiren die Strecke *pt* in *q* sowie I*N* in *r* und ziehen die Geraden *q*I, (IX)*r* bis sie sich in dem Parabel-Scheitel *S* schneiden. $Sz(\| AB)$ ist die Parabel-Axe.

**5.** Construction des hyperbolischen Schnittes *gzO*(*z*) Fig. 3 des Hyperboloides *ABCDEF* mit der zu

den sich schneidenden Erzeugenden *AB, cd* (und *CD, ab*) parallelen Diametralebene *zO(z)*.

Die Hyperbel *gzOz* hat den Mittelpunkt *O* und mit *AB, cd* parallele Asymptoten *Oz, O(z)*. Man braucht also nur den Durchschnittspunkt *g* einer Erzeugenden 1I mit der Ebene *zO(z)* zu bestimmen und kann dann mit Benützung der Asymptoten und des Punktes *g* die Scheitel sowie beliebige Punkte der Hyperbel construiren.

Weil aber die Ebene *zO(z)* von den Ebenen *ABE* und *CDF* gleichweit absteht, so schneidet sie die Erzeugenden 1I. . .(1)(I) in den Mittelpunkten *g*. . .(*g*) der durch die Ebenen *ABE, CDF* abgeschnittenen Strecken 1I. . .(1)(I), weßhalb beliebige Hyperbel-Punkte auch einfach durch Halbiren solcher Strecken dargestellt werden können.

Der Durchschnitt des Hyperboloides mit einer zu zwei sich schneidenden Erzeugenden *AB, cd* parallelen, sonst aber beliebigen Ebene *E* ist eine Hyperbel, deren Asymptoten mit *AB, cd* parallel sind. Die Ebene *E* theilt die von den Ebenen *ABE* und *CDF* abgeschnittenen Strecken 1I, 2II . . (1)(I), (2)(II) . . wieder in proportionale Stücke. Wenn also etwa *g, h* die Durchschnittspunkte der Erzeugenden 1I, 2II mit der Ebene *E* bezeichnen, so ist: $1g : g\mathrm{I} = 2h : h\mathrm{II}$ u. s. w. Der Hyperbel-Mittelpunkt *o* liegt im Durchschnitte der Geraden *AOo* mit der Ebene *E*, wenn nämlich *A* den gemeinschaftlichen Punkt von *AB, cd* bezeichnet.

**6.** Construction der Berührungslinie 1II(III) des Hyperboloides *ABCDEF* Fig. 5 mit einer dasselbe umhüllenden Kegelfläche, deren Scheitel $\lambda$ ist. $\lambda$ liegt in der Geraden $\lambda lL$, welche die Ebene *ABE* in dem Punkte *l* und *CDF* in *L* trifft.

Bekanntlich ist die fragliche Berührungslinie von der zweiten Ordnung; deßhalb ergibt sie sich einfach als Durchschnittslinie des Hyperboloides mit einer Ebene, deren Lage mittelst der Berührungspunkte dreier durch den Punkt $\lambda$ gelegten Tangenten oder Berührungsebenen des Hyperboloides bestimmt wird.

Man ziehe $lq \# EF$, $LqR$, $\lambda rR \parallel EF$ und $lr \parallel Lq$; dann sind *r, R* die Durchschnittspunkte der zu *EF* parallelen Geraden $\lambda rR$ mit den Ebenen *ABE* und *CDF*.

Mit Benützung der Punkte $r$, $R$ können nun sehr einfach durch den Punkt $\lambda$ berührende Ebenen an das Hyperboloid gelegt und die Berührungspunkte derselben gefunden werden.

Eine durch $\lambda R$ gelegte Ebene $\lambda RK$ schneidet die Ebenen $ABE$ und $CDF$ in den Parallelen $rk$, $RK$ und die Erzeugenden $AB$, $CD$, $ab$ in den Punkten $k$, $H$, $J$.

Die Gerade $\lambda k$ trifft die Ebene $CDF$ in dem Punkte $K$. Die Ebene $\lambda AB$ schneidet die Ebene $CDF$ in der zu $AB$ Parallelen $K$I die Erzeugende $CD$ in I und das Hyperboloid außer in $AB$ auch in der Erzeugenden I1, ($E$1||$F$I), weßhalb 1 Berührungspunkt der Ebene $\lambda AB$ mit dem Hyperboloide ist.

Die Gerade $\lambda H$ trifft die Ebene $ABE$ in dem Punkte $h$. Die Ebene $\lambda CD$ schneidet wieder die Ebene $ABE$ in der zu $CD$ Parallelen $h$2, die Erzeugende $AB$ in dem Punkte 2 und das Hyperboloid außer in $AB$ auch noch in der Erzeugenden 2II, ($F$II||$E$2). Demnach ist II Berührungspunkt des Hyperboloides mit der Ebene $\lambda CD$.

$i$ ist Durchschnittspunkt der Geraden $\lambda J$ mit der Ebene $ABE$. Die Ebene $\lambda ab$ schneidet die Ebene $ABE$ in der zu $ab$ Parallelen $i$(3) die Erzeugende $cd$ in dem Punkte (3) und das Hyperboloid außer in $ab$ auch noch in der Erzeugenden (3)(III); II(III)||2(3). Es ist also (III) Berührungspunkt des Hyperboloides und der Ebene $\lambda ab$. Durch die drei Punkte I, II, (III) ist nun die Ebene der fraglichen Berührungslinie vollkommen bestimmt; diese Ebene schneidet die Ebenen $CDF$ und $ABE$ in den Parallelen $M$II(III)$N$, $m$2(3)$n$, folglich die Erzeugende $cd$ in dem Punkte (4). Die Berührungslinie kann als Durchschnitt des Hyperboloides mit der Ebene $Mnm$ nach dem im Vorhergehenden angegebenen Verfahren construirt werden.

Lassen sich durch den Kegelscheitel $\lambda$ Tangenten an die Contour des Hyperboloides ziehen, so können ihre Berührungspunkte zur Bestimmung der Ebene I, II (III) benützt werden.

Stellt $\lambda$ einen leuchtenden Punkt vor, so bildet 1, II (III) die Selbstschattengrenze auf dem Hyperboloide.

**7.** Construction der Berührungslinie 1II(3)(IV) Fig. 6 des Hyperboloides $AB..F$ mit einer dasselbe umhüllenden Cylinderfläche, deren Kanten zu der Geraden $lL$ parallel sind. $l$, $L$ sind Durchschnittspunkte der Geraden $lL$ mit den Ebenen $ABE$ und $CDF$.

Die fragliche Linie ist ein Diametralschnitt des Hyperboloides, dessen Ebene also durch den Mittelpunkt $O$ der Fläche und die Berührungspunkte I, II zweier zu $lL$ parallelen Berührungsebenen des Hyperboloides bestimmt werden kann.

Zieht man durch einen Punkt $k$ der Erzeugenden $AB$ die Gerade $kK \# lL$; so bildet $K$ den Durchschnittspunkt von $kK$ mit der Ebene $CDF$. Die durch $AB$ und $kK$, also parallel zu $lL$ gelegte Ebene $KAB$ schneidet die Ebene $CDF$ in der zu $AB$ Parallelen $K$I, die Erzeugende $CD$ in dem Punkte I und das Hyperboloid außer in $AB$ auch in der Erzeugenden 1 I. $E1 \parallel F$I. Es ist also 1 Berührungspunkt des Hyperboloides mit der zu $lL$ parallelen Ebene $KAB$.

Zieht man ferner durch den beliebigen Punkt $H$ der Erzeugenden $CD$ die Gerade $Hh \# lL$, dann $h2 \parallel CD$ und $F$II$\parallel E2$; so stellt 2 II die zweite Erzeugende vor, nach welcher die zu $lL$ parallele Ebene $hCD$ das Hyperboloid schneidet, und II bildet den Berührungspunkt des Hyperboloides mit der Ebene $hCD$.

Nun kann $a$(IV) $= A1$ und $A(3) = a$II gemacht werden, wodurch (3), (IV) als Berührungspunkte des Hyperboloides mit den zu $lL$ parallelen Ebenen III$cd$ und IV$ab$ sich ergeben. Die Parallelen $M$II (IV) $N$ und $m1$ (3) $n$ bilden die Durchschnitte der Ebene I II (3) (IV) mit den Ebenen $CDF$ und $ABE$. $T1$, $t$II sind Tangenten der Linie 1 II (IV).

Die Berührungslinie kann jetzt als Durchschnitt des Hyperboloides mit der Ebene $MNmn$ construirt werden.

Die Berührungspunkte der Contouren des Hyperboloides und der umhüllenden Cylinderfläche sind zugleich Berührungspunkte dieser Contouren mit der Linie 1 II (3) (IV).

Bezeichnet $lL$ die Richtung des einfallenden Lichtes, dann ist die Linie 1 II (3) (IV) die Selbstschattengrenze auf dem Hyperboloide.

**8.** Die Erzeugenden eines durch drei sich kreuzende Leitlinien $AB$, $CD$, $EF$ gegebenen Hyperboloides können auch auf folgende Weise einfach dargestellt werden.

Man legt durch $AB$ und $CD$ beliebige Ebenen $ABE$ und $CD\varphi$, welche $EF$ etwa in $E$, $\varphi$, und sich in der Geraden $D$ schneiden.

Zieht man dann durch einen beliebigen Punkt $\alpha$ der Geraden $D$ die Geraden $\alpha E$ und $\alpha\varphi$, so trifft erstere die Leitlinie $AB$ in dem Punkte 1, letztere die $CD$ in I, und es ist 1 I eine Erzeugende des

Hyperboloides, denn $\alpha 1$, $\alpha$I und $EF$ liegen in einer Ebene, folglich schneidet 1I nicht nur $AB$ und $CD$, sondern auch $EF$.

In Fig. 7 wurde durch $AB$ und den Punkt $E$ die Ebene $EAB$, durch $CD$ die zu $EF$ parallele Ebene $\alpha CD$ gelegt und $\alpha D$ als Durchschnittslinie der Ebenen $EAB$ und $CD\varphi$ angenommen. Weil die Ebene $\alpha CD$ zu $EF$ parallel ist, so schneidet jede durch $EF$ gelegte Ebene die Ebene $\alpha CD$ in einer zu $EF$ parallelen Geraden, und deßhalb ist $\alpha \mathrm{I} \| EF$. $\alpha E$ und $AB$ haben den Punkt 1 gemeinschaftlich; folglich bildet 1I eine Erzeugende des Hyperboloides. Auf gleiche Weise können beliebige Erzeugende desselben Systemes construirt werden. $CD$ trifft die Ebene $EAB$ in $D$, weßhalb $EBD$ auch eine Erzeugende bildet.

Um eine Erzeugende des zweiten Systemes, z. B. (I)(1) zu finden, lege man durch (I) und eine Erzeugende 5V des ersten Systemes eine Ebene, welche also die Ebene $EAB$ in der Geraden 5(I)$u$ sowie die Ebene $\alpha CD$ in der Geraden $u$V$q$ schneidet, suche den Durchschnittspunkt (1) einer anderen Erzeugenden 1I des ersten Systemes und ziehe (1)(I). Die Ebenen $AB$1I und $\alpha CD$ schneiden sich in $p$I, die Ebenen 5(I)V und $AB$I in 5$q$; die Geraden 5$q$ und 1I begegnen sich in (I).

In derselben Figur wurde der Durchschnitt 2$g$V des Hyperboloides $ABF$ mit der Ebene $MNO$ construirt. $MN$ liegt in der Ebene $\alpha CD$ und $NO$ in der Ebene $EAB$. Es schneiden sich $MN$, $CD$ in V und $NO$, $AB$ in 2, weßhalb die Punkte 2, V der Curve 2$g$V angehören. Die Ebene 2$p$II berührt das Hyperboloid in dem Punkte 2 und schneidet die Ebene $MNO$ in der Geraden $M$2, welche also wieder die Schnittcurve in 2 tangirt. Die Ebene $CD$5 berührt im Punkte V das Hyperboloid und schneidet in der Geraden $T$V die Ebene $MNO$; deßhalb ist $T$V ebenfalls eine Tangente der Schnittcurve.

Die Ebenen 3$p$III, $MNO$ haben die Gerade $w$2 und die Geraden $w$2, 3III haben den Punkt $g$ gemeinschaftlich; daher ist $g$ Durchschnittspunkt der Erzeugenden 3III mit der Ebene $MNO$. Die Tangente $tg$ der Linie 2$g$V ergibt sich aber als Durchschnitt der Ebenen 3III(1)I und $MNO$.

Da im Allgemeinen die durch $g$ gehende Erzeugende (1)(I) erst zu ziehen sein wird, so kann zu diesem Behufe durch $g$ und die Erzeugende 5V die Ebene $g$5$r$V gelegt werden, welche also die

Ebene $\alpha CD$ in $r$V$u$, die Ebene $EAB$ in $u$(I)5 und das Hyperboloid außer in 5 V auch noch in der Erzeugenden (I) $g$ (1) schneidet.

Wie $g$ und $tg$ können andere Punkte und Tangenten des Schnittes dargestellt werden. Daß mittelst der Tangenten $M2$, $T$V und des Punktes $g$ die übrigen Punkte des Schnittes durch die Polar-Construction gefunden werden können, ist selbstverständlich.

Bestimmt man durch die Mittelpunkte zweier Sehnen und die Durchschnittspunkte der je einer Sehne anliegenden Tangenten die Lage zweier Durchmesser, so ergibt sich, daß der Durchschnittspunkt der beiden Durchmesser, das ist der Mittelpunkt der Schnittcurve, auf der convexen Seite der Curve 2$g$V liegt, daß also 2$g$V ein Hyperbelast ist.

**9.** In den Figuren 8, 9, 10 ist das Hyperboloid $abcdABCD$ durch zwei zur Flächenaxe $qQ$ senkrechte, vom Mittelpunkte $O$ gleichweit entfernte, also congruente und ähnlich liegende elliptische Schnitte $abcd$, $ABCD$ und durch die große Axe $\alpha\beta$ der Einziehungslinie $\alpha\beta\gamma\delta$ gegeben. Die Axen $ab$, $AB$, $\alpha\beta$ sind senkrecht zu $qQ$. Unter dieser Voraussetzung sind also die Ellipsen-Axen, deren Projectionen $ab$, $AB$, $\alpha\beta$ darstellen, parallel zur Zeichnungsfläche [1]).

Die Ellipse $ABCD$ bildet zugleich die orthogonale Projection der Ellipse $abcd$ auf der Ebene $ABD$. Auf derselben Ebene ist die orthogonale Projection der Einziehungslinie $\alpha\beta\gamma\delta$ eine mit $ABCD$ ähnliche Ellipse $\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta$, von welcher jedoch nur die Axe $\dot\alpha\dot\beta = \alpha\beta$ dargestellt ist. Die Projectionen auf der Ebene $ABD$ von den geraden Erzeugenden des Hyperboloides sind Tangenten an die Ellipse $\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta$. Um die Tangenten ohne Zeichnung der Ellipse $\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta$ darstellen zu können, projiciren wir die Ellipsen $ABCD$, $\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta$ in der Richtung $CC_1$ so, daß als bezügliche Projectionen die aus $Q$ beschriebenen Kreise $AC_1B$ und $\dot\alpha\gamma_1\dot\beta$ erhalten werden; dann erscheinen die Projectionen von den Tangenten der Ellipse $\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta$ als Tangenten des Kreises $\dot\alpha\dot\beta\gamma_1$.

Nun können die Erzeugenden des Hyperboloides sehr einfach dargestellt werden,

Um etwa die durch den Punkt $E$ gehenden Erzeugenden zu finden, hat man $EE_1 \perp AB$, an den Kreis $\dot\alpha\dot\beta\gamma_1$ die Tangenten $E_1e_1$, $E_1f_1$,

[1]) Den Fall, wo die genannten Ellipsenaxen gegen die Zeichnungsfläche geneigt sind, behandeln wir nicht separat, weil die ebenen Schnitte des betreffenden Hyperboloides auf gleiche Weise wie jene in den Fig. 8, 9, 10 construirt werden können.

dann die Geraden $e_1e$ und $f_1f \perp AB$ und endlich die Erzeugenden $Ee$, $Ef$ zu ziehen.

Die durch Punkte der Ellipse $abcd$ zu ziehenden Erzeugenden ergeben sich auf gleiche Weise.

Die Contour $g\alpha G..\beta H$ des Hyperboloides ist eine Hyperbel, deren Mittelpunkt $O$ und deren Axe $\alpha\beta$ ist; sie berührt die Ellipsen $abcd$, $ABCD$ in den Punkten $g$, $G$, $h$, $H$, welche direct construirt werden können, wenn berücksichtigt wird, daß die diesen Punkten entsprechenden Tangenten zugleich Contouren jener Kegelflächen bilden, die von dem Hyperboloide in den Ellipsen $ABCD$, $abcd$ berührt werden.

Da die durch die beiden Erzeugenden $Ee$, $Ef$ bestimmte Ebene in dem Punkte $E$ das Hyperboloid berührt; so ist sie zugleich eine Berührungsebene des von dem Hyperboloide umhüllten Kegels $z$ $ABCD$, und zwar berührt sie denselben längs der Kante $Ewz$, welche durch den Mittelpunkt $w$ der Strecke $ef$ geht, und die Axe $qQ$ in dem Punkte $z$, dem Scheitel des Kegels schneidet.

$zG$, $zH$ sind also Tangenten und $G$, $H$ Berührungspunkte der Ellipse $ABCD$ und der Hyperbel $G\alpha..\beta H$. Mit Bezug auf die Axe $\alpha\beta$ liegen die Punkte $g$, $G$ sowie $h$, $H$ symmetrisch.

Mittelst der Axe $\alpha\beta$ und eines der Punkte $g$, $G$, $h$, $H$ können sofort die Asymptoten und dann beliebige Punkte der Contour-Hyperbel construirt werden.

Wenn die Contour in entsprechender Ausdehnung gezeichnet wäre, könnten die Erzeugenden des Hyperboloides unmittelbar als Tangenten derselben gezogen werden.

Das unvollkommen bestimmte Hyperboloid geht in ein der Form nach bestimmtes über, wenn von einer der Geraden $qQ$, $CD$ die wahre Länge oder die Neigung gegen die Zeichnungsfläche angenommen wird. Wenn überdies der Durchschnittspunkt von $qQ$ oder $CD$ mit der Zeichnungsfläche angenommen wird, dann ist auch die Lage des Hyperboloides gegen die Zeichnungsfläche festgestellt.

**10.** Construction des elliptischen Durchschnittes I II III IV Fig. 8 des Hyperboloides $ab..D$ mit der Ebene $MNm$, welche die Ebene $ABC$ in der Geraden $MN$ und $abc$ in $mn (\| MN)$ schneidet.

Bestimmt man den Berührungspunkt $T$ der Ellipse $ABCD$ mit der zu $MN$ parallelen Tangente und legt durch $T$, $qQ$ eine Ebene,

so schneidet dieselbe das Hyperboloid nach einer Hyperbel, welche den geometrischen Ort der Berührungspunkte des Hyperboloides mit zu *MN* parallelen Tangenten bildet. Die bezügliche Hyperbel schneidet die Ebene *MNm* in den Punkten I, II, welche also in der Durchschnittslinie *pP* der Ebenen *MNm* und *TqQ* liegen. $qp \| QP$.

Da nun die Geraden, welche parallel zu *MN* durch I und II gezogen werden, Tangenten des Hyperboloides bilden und in der Ebene *MNm* liegen, so sind sie zugleich Tangenten der fraglichen Ellipse; weil sie aber mit einander parallel sind, so ist I II ein Durchmesser dieser Ellipse.

Um die Durchschnittspunkte I, II der Geraden *pP* mit dem Hyperboloide ohne Zeichnung jener Hyperbel zu finden, betrachten wir den gemeinschaftlichen Punkt $\sigma$ der Geraden *pP*, *qQ* als Scheitel einer Kegelfläche $\sigma PA_1$, deren Basis in der Ebene *ABD* liegt, also durch den Punkt *P* geht und eine mit *ABCD* ähnliche Ellipse $QPA_1$ ist. $PA_1 \| TA$.

Der Kegel $\sigma PA_1$ und das Hyperboloid schneiden sich in zwei mit *ABCD* ähnlichen Ellipsen, deren Ebenen mit *ABD* parallel sind, und die beiden Ellipsen schneiden wieder die Gerade *pP* in den Punkten I, II.

Jede Erzeugende des Hyperboloides trifft die Kegelfläche $\sigma PA_1$ in zwei Punkten, welche den genannten Durchschnitts-Ellipsen angehören. Wenn aber zwei solche Punkte bekannt sind, so können durch sie mit *ABD* parallele Ebenen gelegt und deren Durchschnittspunkte I, II mit der Geraden *pP* construirt werden.

Wir suchen die Durchschnittspunkte (I), (II) der Erzeugenden *eE* mit der Kegelfläche $\sigma PA_1$, ziehen also durch den Punkt $\sigma$ die mit *eE* Parallele $\sigma i$, deren orthogonale Projection *Qi* auf der Ebene *ABD* mit der gleichnamigen Projection $Ee'$ der Erzeugenden *eE* parallel ist. *i*, *E* sind Durchschnittspunkte der Geraden $\sigma i$ und *eE* mit der Ebene *ABD*, folglich ist *iE* die Durchschnittslinie der Ebenen $\sigma ieE$ und *ABD*.

Die Durchschnittspunkte *x*, *y* der Geraden *Ei* mit der Ellipse $QPA_1$ construiren wir mit Benützung des aus *Q* mit dem Halbmesser $QA_1$ beschriebenen Kreises und der Geraden $(x)$ $(y)$ als der schiefen Projectionen der Ellipse $PQA_1$ und der Geraden *xy*; oder mit Benützung der Ellipse *ABCD* und der Geraden $[x]$ $[y]$, welche letztere

zu der Ellipse $ABCD$ in denselben Beziehungen steht, wie $xy$ zu der Ellipse $QPA_1$.

Die Ebene $\sigma ieE$ schneidet die Kegelfläche $\sigma PA_1$ in den Kanten $x\sigma$ und $y\sigma$ und diese treffen wieder die Erzeugende $eE$ in den Punkten (I), (II). Wird nun (I) I $\| xP$ und (II) II $\| yP$ gezogen, so schneiden sich $pP$, (I) I, (II) II in den fraglichen Punkten I, II; denn $xP$, $yP$ und (I) I, (II) II können als Durchschnitte der Ebenen $\sigma Px$, $\sigma Py$ mit $ABD$, und der parallel zu $ABD$ durch (I) und (II) gelegten Ebenen betrachtet werden, in welchen letzteren Ebenen nämlich die Durchschnitts-Ellipsen der Kegelfläche $\sigma PA_1$ und des Hyperboloides liegen.

Weil der zu I II conjungirte Durchmesser III IV der Ellipse I II III IV der Lage nach bestimmt ist, indem er durch den Mittelpunkt $\mu$ von I II geht und zu $MN$ parallel ist; so handelt es sich nur noch um die Construction eines Punktes der Ellipse, um dann auf bekannte Weise die Endpunkte III, IV des Diameters III IV, sowie beliebige Punkte der Ellipse unabhängig von dem Hyperboloide darstellen zu können.

Für diesen Zweck kann etwa der Durchschnittspunkt V der Erzeugenden $eE$ mit der Ebene $MNm$ bestimmt werden, indem durch $eE$ eine beliebige Ebene $EPem$ gelegt wird, welche die Ebenen $ABD$ $abd$ in den parallelen Geraden $EP$, $em$ und die Ebene $MNm$ in der Geraden $Pm$ schneidet. $Pm$, $eE$ haben den Punkt V gemeinschaftlich.

Die Ebene $gGhH$ der Contour-Hyperbel schneidet die Ebenen $abd$, $ABD$ in den parallelen Geraden $ghn$ und $NGH$, die Ebene $MNm$ also in der Geraden $Nn$; $Nn$ schneidet aber die Hyperbel $gGH$ in den Punkten VI, VII, in welchen sich die Hyperbel und die Ellipse I II III IV berühren.

**11.** Construction des parabolischen Durchschnittes I $ef$ des Hyperboloides $ab..D$ Fig. 9 mit der Ebene $MNmn$, welche die Ebene $ABD$ in der Geraden $MN$ und $abd$ in $mn (\| MN)$ schneidet.

Für die Untersuchung, von welcher Beschaffenheit der fragliche Schnitt ist, benützen wir einen Hilfskegel $SABCD$, welcher die Basis $ABCD$ hat und dessen Kanten mit den Erzeugenden des Hyperboloides parallel sind. Der Scheitel $S$ des Hilfskegels ergibt sich, wenn parallel zu der orthogonalen Projection $Ee'$ der Erzeugenden $Ee$ die Gerade $QL$ und parallel zu der Erzeugenden $Ee$ die Kegelkante $LS$ bis zum Durchschnitte $S$ mit der Axe $qQ$ gezogen wird.

*T* ist der Berührungspunkt einer mit *MN* parallelen Tangente der Ellipse *ABCD*.

Die Ebenen *MNm* und *PTqQ* schneiden sich in der Geraden *pP* (*qp*||*QP*), welche mit der Kante *ST* des Hilfskegels parallel ist; die Ebene *MNm* ist also parallel mit der Ebene, welche den Hilfskegel in der Kante *ST* berührt; deßhalb ist der Durchschnitt des Hyperboloides mit der Ebene *MNm* eine Parabel, deren Axe mit der Kegelkante *ST* parallel liegt und *pP* ist ein Durchmesser dieser Parabel.

Der Durchschnittspunkt I der Geraden *pP* mit dem Hyperboloide könnte auf gleiche Weise wie die Punkte I, II in Fig. 8 construirt werden. Die dem Parabel-Punkte I entsprechende Tangente ist mit *MN* parallel.

Zur Bestimmung des Parabelscheitels $\sigma$ ist jedoch der Punkt I nicht nothwendig, weil $\sigma$ mit Benützung der Parabel-Tangenten *te*, *tf* wie in Fig. 4 construirt werden kann.

Die Tangenten $et\varepsilon$ und $ft\varphi$ ergeben sich als Durchschnitte der Ebene *MNm* mit den Ebenen *eE*(*E*) und *fF*(*F*), welche das Hyperboloid nach den Erzeugenden *eE*, *e*(*E*) und *fF*, *f*(*F*) schneiden, also auch in *e* und *f* berühren. Die Ebenen *eE*(*E*), *fF*(*F*) schneiden die Ebene *ABD* in den Geraden $(E)E\varepsilon$, $(F)F\varphi$, die Trace *MN* in den Punkten $\varepsilon$, $\varphi$ und die Ebene *MNm* in den Geraden $\varepsilon te$, $\varphi tf$.

Weil die Sehne *ef* und der Durchmesser *p*I *P* conjungirt sind, so liegt der Durchschnittspunkt *t* der Tangenten $\varepsilon e$ und $\varphi f$ in dem Durchmesser *pP*. Man hätte also auch nur eine von den Tangenten, etwa $\varphi tf$, auf die angegebene Weise construiren und die andere *te* durch Verbinden der Punkte *t*, *e* bestimmen können.

$E\varepsilon$ und $F\varphi$ sind beziehungsweise parallel mit den Tangenten, welche die Ellipse *abcd* in *e* und *f* berühren.

**12.** Construction des hyperbolischen Schnittes *ueEW* des Hyperboloides *ab..D* Fig. 10 mit der Ebene *MNm*, welche die Ebenen *ABD* und *abd* in den Geraden *MN*, *mn* schneidet.

Um die Richtungen der Asymptoten der fraglichen Hyperbel zu finden, construiren wir wieder den Hilfskegel *SABCD*, dessen Basis die Ellipse *ABCD* bildet und dessen Kanten mit den Erzeugenden des Hyperboloides parallel sind und legen durch den Scheitel *S* die zu *MNm* parallele Ebene *SJK*. *qp*||*QP*; *SR*||*pP*, *JRK*||*MN*. Weil die Ebene *SJK* die Ebene *ABD* in der Geraden *JK*, daher den Hilfskegel

in den Kanten $SJ$, $SK$ schneidet; so sind durch $SJ$, $SK$ die Richtungen der Asymptoten bestimmt.

Die gemeinschaftlichen Punkte $E$, $W$ der Trace $MN$ und der Ellipse $ABCD$, sowie die gemeinschaftlichen Punkte $u$, $v$ der Trace $mn$ und der Ellipse $abcd$ gehören der Hyperbel an.

Da die Sehnen $uv$, $EW$ parallel sind; so ist durch ihre Mittelpunkte $p$, $P$ die Lage eines Durchmesser in der Hyperbel bestimmt.

Die durch die Erzeugenden $Ee$, $Ef$ und $uU$, $uV$ gelegten Ebenen $Eef$, $uUV$ berühren das Hyperboloid in den Punkten $E$, $u$ und schneiden deßhalb die Ebene $MNm$ in den Geraden $iE$, $ku$, welche Tangenten der Hyperbel sind. Die durch den Mittelpunkt $r$ der Sehne $uE$ und den Begegnungspunkt $t$ der Tangenten $iE$, $ku$ gezogene Gerade $rt$ ist also ebenfalls ein Durchmesser der Hyperbel.

Im Durchschnitte der beiden Diameter $pP$ und $rt$ ergibt sich der Hyperbel-Mittelpunkt $\mu$.

Nun können die mit $SJ$, $SK$ parallelen Asymptoten $\mu z$, $\mu(z)$ gezogen und dann die Scheitel sowie beliebige Punkte der Hyperbel unabhängig von der Fläche construirt werden.

Der Mittelpunkt $\mu$ kann auch auf folgende Weise construirt werden. Man bestimmt die Durchschnittspunkte $x$, $y$ der in der Ebene $qQpP$ befindlichen Kanten $TS$, $YS$ des Hilfskegels mit der Geraden $pP$, halbirt die Strecke $x$, $y$ in $(\mu)$ und zieht $O\mu || S(\mu)$ bis $pP$ in $\mu$ getroffen wird.

Wenn aber die mit der Ebene $MNm$ parallelen Erzeugenden des Hyperboloides dargestellt sind, so kann $\mu$ einfach als Durchschnittspunkt des durch den gemeinschaftlichen Punkt dieser Erzeugenden gezogenen Diameters des Hyperboloides mit der Ebene $MNm$ bestimmt werden.

**13.** Die zwei kleinsten Kreisschnitte eines elliptischen Hyperboloides haben die große Axe $\alpha\beta$ der Kehllinie als gemeinschaftlichen Durchmesser. Construirt man in einer Geraden des Hyperboloides die Punkte $k$, $K$, welche von $O$ den Abstand $O\alpha = O\beta$ haben; so gehört $k$ dem einen und $K$ dem anderen Kreisschnitte an, und folglich können durch $k$, $\alpha\beta$ und $K$, $\alpha\beta$ die Ebenen dieser Kreisschnitte bestimmt werden.

Es ist selbstverständlich, daß diese Aufgabe nur dann gelöst werden kann, wenn das betreffende Hyperboloid vollständig bestimmt ist.

## Das windschiefe Paraboloid.

**14.** Construction des hyperbolischen Schnittes *c* II III *G* Fig. 11 des Paraboloides *agAG* mit der Ebene *MNm*.

Das Paraboloid ist durch zwei Erzeugende *aA*, *gG* des einen und zwei Erzeugende *ag*, *AG* des anderen Systemes gegeben.

Wir theilen die Strecken *aA*, *gG* sowie *ag*, *AG* in gleichviele gleiche Stücke : $ab = bc = \quad . fg = {}^1/_6\, ag$, $AB = BC = \quad . FG = {}^1/_6\, AG$, $Ah = hi = .. = la = {}^1/_5\, aA$, $GH = HJ = .. Lg = {}^1/_5\, gG$ und ziehen die Erzeugenden *bB*, *cC*. .*fF*, *hH*, *iJ*. .*lL*. Dann legen wir durch die Erzeugende *ag* die zu *AG* parallele Ebene *agmn*, sowie durch die Erzeugende *AG* die zu *ag* parallele Ebene *AGMN* und bestimmen die parallelen Durchschnitte *mn*, *MN* der Ebene *MNm* mit den Ebenen *agn*, *AGN*.

Im allgemeinen Falle können die Parallelen *MN*, *mn* in den genannten Ebenen beliebig angenommen werden, was auch hier geschehen ist.

Die gemeinschaftlichen Punkte *c* von *ag*, *mn* und *G* von *GA MN* gehören der fraglichen Durchschnittscurve an.

Um zu untersuchen, von welcher Beschaffenheit die Durchschnittscurve ist, construiren wir zunächst den Durchschnitt *Gn* der Ebene *MNm* mit der zu *aA* parallelen Ebene *gGx*. Zu dem Behufe ziehen wir $Gx \| cC$, $cx \| AG$, dann *xgn* bis *mn* in *n* geschnitten wird. *x*, *g* sind Durchschnittspunkte der Geraden *Gx*, *Gg* mit der Ebene *agn*, folglich sind *xn*, *Gn* Durchschnitte der Ebene *Ggx* mit den Ebenen *agm* und *MNm*.

Weil die Ebene *MNm* die Richtungsebenen *agn* und *gGx* in den Geraden *mn*, *Gn* schneidet, so ist also die fragliche Durchschnittscurve eine Hyperbel, deren Asymptoten mit den Geraden *mn*, *Gn* parallel sind.

Die durch die Erzeugenden *ag*, *cC* gelegte Ebene berührt das Paraboloid in dem Punkte *c* und schneidet die Ebene *AGN* in der zu *ag* Parallelen *CN* sowie die Ebene *MNm* in der Geraden *Nc*, welche letztere Tangente der Hyperbel *c* II *G* ist.

Die durch die Erzeugenden *gG* und *AG* gelegte Ebene berührt wieder das Paraboloid in dem Punkte *G* und schneidet die Ebene

*agn* in der zu *AG* Parallelen *gt*, sowie die Ebene *MNm* in der Geraden *tG*, welche ebenfalls eine Tangente der Hyperbel ist.

Nun kann durch den Mittelpunkt $\mu$ der Sehne *cG* und den gemeinschaftlichen Punkt *r* der Tangenten *Nc*, *tG* der Hyperbel-Durchmesser $\mu r$ gezogen werden. Trägt man auf die Tangente *cN* nach beiden Seiten von *c* gleiche Stücke *cq*, *cr* und zieht $rv \| Gn$, $qv \| mn$ sowie *cv*; so ist *cv* ein zweiter Durchmesser. Im Durchschnitte von $\mu r$, *cv* liegt also der Hyperbel-Mittelpunkt *o*. Um einen günstigeren Durchschnitt zu erhalten, kann man den Durchmesser *Gw* benützen.

$oR (\| MN)$ und $oQ (\| Gn)$ bilden die Asymptoten und *S* ist ein Scheitel der Hyperbel *c* II *G*.

Wenn die Asymptoten außerhalb der Zeichnungsfläche fallen, oder wenn nur ein kurzes Stück der Schnittcurve dargestellt werden soll, kann man die Hyperbelpunkte als Durchschnitte der Erzeugenden mit der Ebene *MNm* construiren; um aber die Hyperbel möglichst genau ziehen zu können, wird man auch einzelne Tangenten derselben darstellen.

Soll etwa der Durchschnittspunkt III der Erzeugenden *kK* mit der Ebene *MNm* dargestellt werden, so lege man durch die Geraden *kK* und *Gg* eine Ebene *kKg*; diese schneidet die Ebene *agmn* in einer mit *kK* parallelen Geraden *g* 3, die Trace *mn* in dem Punkte 3 und die Ebene *MNm* in der Geraden 3 *G*; folglich schneiden sich die Geraden *kK* und 3 *G* in dem verlangten Punkte III.

Legt man durch *kK* und *cC* eine Ebene, so schneidet sie die Ebene *AGM* in der zu *kK* Parallelen *C*(3), die Trace *MN* in dem Punkte (3) und daher die Ebene *MNm* in der Geraden *c*(3); dann ergibt sich der Punkt III im Durchschnitte der Geraden *kK* und *c*(3).

Um die dem Hyperbelpunkte III entsprechende Tangente *y* III zu finden, ist durch III die Erzeugende *p* III *P* zu ziehen ($ep : pf = EP : PF = E\text{III} : \text{III}\varphi$), durch *kK* und *pP* eine Ebene zu legen, welche also im Punkte III das Paraboloid berührt und die Ebene *MNm* nach der Tangente *y* III schneidet. Die Ebene *kKpP* schneidet die Ebenen *agm*, *AGM* in den zu *kK* Parallelen *py*, *P*(*y*), die Tracen *mn*, *MN* in den Punkten *y*, (*y*) und folglich die Ebene *MNm* nach der Tangente *y* III (*y*).

Ebenso einfach können die Durchschnittspunkte der Erzeugenden des zweiten Systemes mit der Ebene *MNm* construirt werden.

Um etwa den Durchschnittspunkt II der Erzeugenden $eE$ mit $MNm$ darzustellen, lege man durch $Ee$ und $ag$ die Ebene $Eeg$; $Eeg$ schneidet die Ebene $AGM$ in der zu $ag$ Parallelen $E2$, die Trace $MN$ in dem Punkte 2 und folglich die Ebene $MNm$ in der Geraden $c2$. $c2$ und $Ee$ treffen sich in dem Punkte II.

Weil die Erzeugenden $kK$ und $eE$ sich schneiden, so können die Punkte II, III auch mittelst der Durchschnittslinie $z(z)$ der Ebene $MNm$ und der durch die beiden Erzeugenden $eE$, $kK$ gelegten Ebene auf einmal gefunden werden. Zu dem Behufe hat man die mit $kK$ Parallelen $ez$, $E(z)$ bis $z$ in $mn$ und $(z)$ in $MN$ und nachher $z(z)$ zu ziehen. $z(z)$ schneidet $eE$ in II und $kK$ in III.

**15.** Construction des parabolischen Schnittes $saG$ des Paraboloides $agAG$ Fig. 12 mit der Ebene $MNmn$.

Man ziehe $cx \| AG$, $Gx \| cC$ und lege die Ebenen $cgx$, $gGx$, welche also beziehungsweise mit den Erzeugenden $AG, \ldots lL$ und $aA$, $\ldots fF$ parallel sind. Die Durchschnittslinie $gx$ der Ebenen $cgx$ und $gGx$ bezeichnet die Richtung der Axe des Paraboloides sowie auch jene der Axen aller parabolischen Schnitte dieser Fläche.

Weil die Ebene $MNm$ die Ebenen $cgx$ und $gGx$ in den zu $gx$ parallelen Geraden $MN$, $mn$ schneidet; so ist die fragliche Durchschnittscurve $saG$ eine Parabel, deren Axe $sz$ eine mit $gx$ parallele Lage hat. $a$, $G$ sind Punkte dieser Parabel.

Zum Behufe der Bestimmung des Parabel-Scheitels $s$ legen wir durch die Erzeugenden $ga$, $aA$ die Ebene $gaA$, welche das Paraboloid in dem Punkte $a$ berührt, die Ebene $MGA$ in der zu $ag$ Parallelen $At$ und die Ebene $MNm$ in der Geraden $ta$ schneidet; $ta$ ist also eine Tangente der Parabel. Ebenso bestimmen wir die Parabel-Tangente $nG$, nämlich als Durchschnitt der das Paraboloid in dem Punkte $G$ berührenden Ebene $gGA$ und der Ebene $MNm$; $gn \| AG$. Dann errichten wir $aN \perp MN$, $Gm \perp mn$, halbiren die Strecke $tN$ in $u$ sowie $mn$ in $r$ und ziehen die Geraden $uas$, $Grs$, deren Durchschnittspunkt $s$ der Parabel-Scheitel ist. Die Tangenten $ta$ und $nG$ schneiden sich in dem Punkte $T$ und der Parabel-Durchmesser $Tw$ geht durch den Mittelpunkt $w$ der Sehne $aG$. Die Gerade $Gs$ könnte also auch dadurch gefunden werden, daß man durch den Mittelpunkt $w$ der Sehne $aG$ den Durchmesser $m_1wT$ bis zum Durchschnitte $m_1$ mit der

Geraden $Gm$ zieht, die Strecke $Tm_1$ in $r_1$ halbirt und dann $Gr_1$ bis $s$ verlängert.

**Zusätze.** *a.* Die Berührungslinie des Paraboloides mit einer dasselbe umhüllenden Kegelfläche ist eine Hyperbel, deren Ebene $E$ durch die Berührungspunkte dreier durch den Kegelscheitel $\lambda$ an das Paraboloid gelegten Tangenten oder Berührungsebenen bestimmt werden kann.

Der folgende Vorgang zur Bestimmung der Ebene $E$ ist ähnlich dem in Art. 6 angegebenen.

Man ziehe die zu $gG$ parallele Gerade $\lambda rR$ und bestimme ihre Durchschnitte $r$, $R$ mit den Ebenen $agn$ und $AGN$; $rR \# gG$; ferner ziehe man die zu $gx$ parallelen Durchschnitte $rk$ und $RK$ der zu der Richtungsebene $gGx$ parallelen Ebene $\lambda RK$ mit den Ebenen $agn$ und $AGN$.

Es treffen sich die Geraden $rk$, $ag$ in $k$; $RK$, $AG$ in $H$; $rk$, $\lambda H$ in $h$ und $RK$, $\lambda k$ in $K$.

Die Ebene $\lambda ag$ schneidet die Ebene $AGN$ in der zu $ag$ Parallelen $K$I, die Erzeugende $AG$ in dem Punkte I und das Paraboloid außer in $ag$ auch noch in der Geraden I1; folglich berührt sie das Paraboloid in dem gemeinschaftlichen Punkte I von $ag$, 1I. Die Ebene $\lambda AG$ schneidet die Ebene $agn$ in der zu $AG$ Parallelen $h$2 die Erzeugende $ag$ in 2 und das Paraboloid außer in $AG$ auch noch in der Erzeugenden 2II; daher berührt sie das Paraboloid in dem Begegnungspunkte II von $AG$, 2II.

Die Erzeugende $kH$ liegt in der Richtungsebene $\lambda rk$, weßhalb die Hyperbel-Ebene $E$ mit $kH$ parallel ist.

Zieht man also I$(n) \# kH$, 2$(n)$ und nachher I$(N) \| 2(n)$; so bilden I$(N)$, 2$(n)$ die Durchschnitte der Hyperbelebene mit den Ebenen $AG(N)$ und $ag(n)$. Nun kann die Hyperbel auf die in Art. 14 besprochene Weise construirt werden; ihre Asymptoten sind parallel mit den Geraden $kH$, 2$(n)$.

Für eine vom Punkte $\lambda$ ausgehende Beleuchtung ist diese Hyperbel die Grenze des Selbstschattens des Paraboloides.

*b.* Die Berührungslinie des Paraboloides mit einer dasselbe umhüllenden, zu der Geraden $lL$ parallelen Cylinderfläche ist eine Parabel, deren Ebene $E$ also mit der Durchschnittslinie $gx$ der Richtungsebenen $agn$ und $gGx$ parallel ist. Um $E$ zu bestimmen, braucht man nur die Berührungspunkte von zwei mit $lL$ parallelen

Berührungsebenen des Paraboloides aufzusuchen, und durch dieselben die mit *gx* parallele Ebene *E* zu legen.

Es seien *l*, *L* die Durchschnittspunkte der Geraden *lL* mit den Ebenen *agn* und *AGN*.

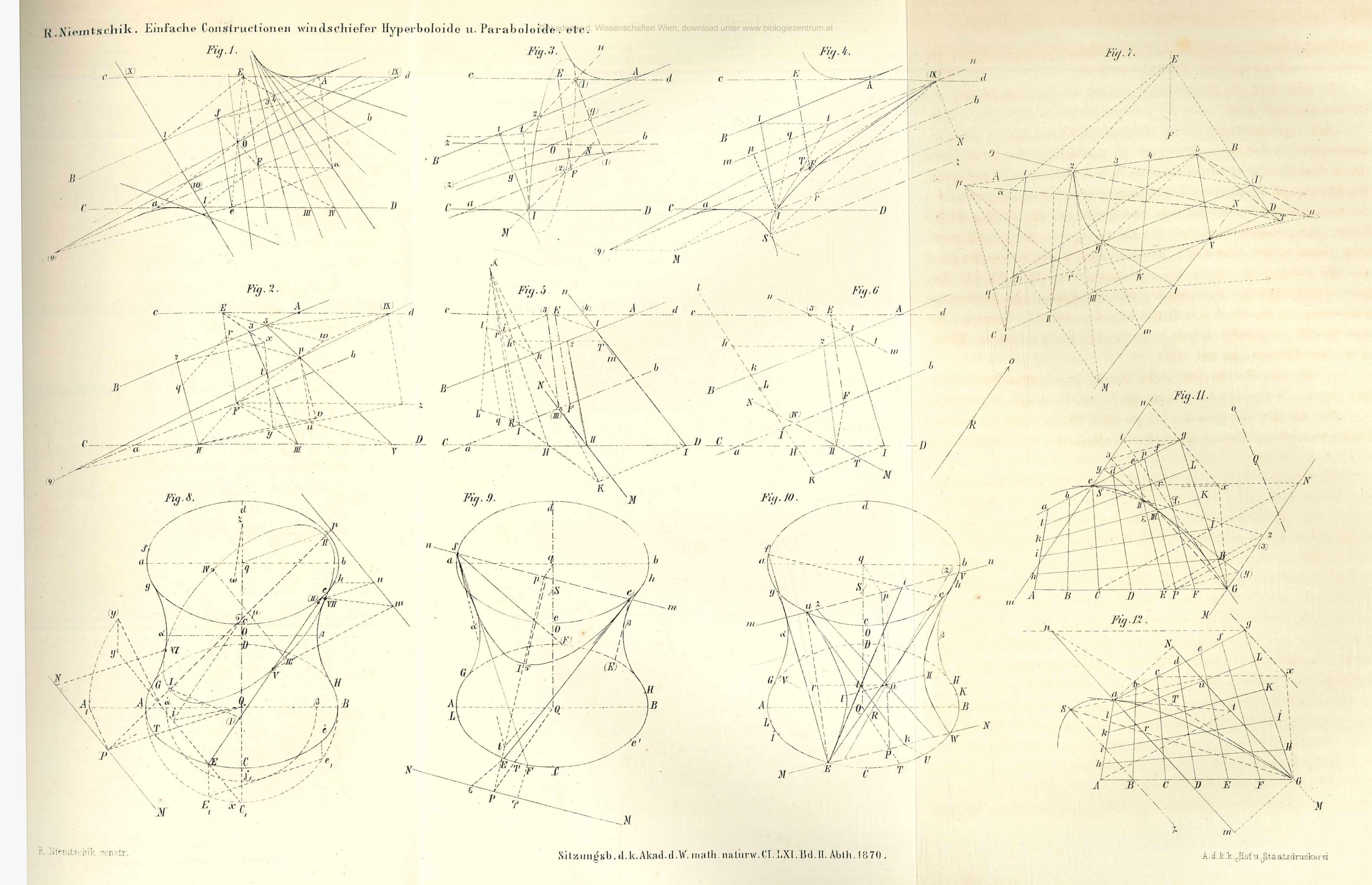
Man lege durch *ag* die zu *lL* parallele Ebene *agK*, welche die Ebene *AGx* in der zu *ag* Parallelen *K*I (*gK*╫*lL*), die Erzeugende *AG* in dem Punkte I und das Paraboloid in der Geraden I1 schneidet. Die Ebene *agK* berührt das Paraboloid in dem Begegnungspunkte 1 der Geraden *ag*, I1. Ferner lege man durch *AG* die zu *lL* parallele Ebene *AGh*; dieselbe schneidet die Ebene *agx* in der zu *AG* parallelen Geraden *h*2 (*Gh*╫*lL*), die Erzeugende *ag* in dem Punkte 2 und das Paraboloid außer in *ag* auch noch in der Geraden 2II. Der Berührungspunkt des Paraboloides mit der Ebene *agh* ergibt sich also wieder im Durchschnitte II der Geraden *AG*, 2II. Endlich ziehe man die mit *gx* parallelen Durchschnitte 1(*n*) und II(*N*) der Ebene *E* mit den Ebenen *agn* und *AGN*.

Die aus dem Durchschnitte der Ebene *E* mit dem Paraboloide sich ergebende Parabel kann nun nach Art. 15 dargestellt werden.

Für die mit der Geraden *lL* parallele Beleuchtung ist die genannte Parabel die Grenze des Selbstschattens des Paraboloides.

R. Niemtschik. Einfache Constructionen windschiefer Hyperboloide u. Paraboloide, etc.






R. Niemtschik constr.



A. d. k. k. Hof u. Staatsdruckerei